Option T - Durée : 4 heures

Mathématiques

PROBLEME

On note N l'ensemble des entiers naturels,
R l'ensemble des nombres réels,
R^+ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
Les accents $'$ et $''$ désignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde.

Soient les fonctions

$$\psi_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

et

$$\psi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},$$

et l'équation différentielle

$$(1) \quad : \quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0.$$

Partie I

1°) Déterminer le rayon de convergence des séries entières qui définissent ψ_0 et ψ_1.
Montrer que ψ_1 est solution sur R de (1).

2°) Calculer $\psi_0'(x) + \psi_1(x)$ et $\frac{d}{dx}(x\psi_1(x)) - x\psi_0(x)$.

Partie II

Pour tout réel strictement positif m , on pose

$$f_m(x) = \psi_1(mx) .$$

1°) Former une équation différentielle vérifiée par f_m .

2°) a et b étant deux réels strictement positifs distincts, montrer que

$$\frac{d}{dx}\Big[x\big(f_a(x)\,f_b'(x) - f_b(x)\,f_a'(x)\big)\Big] = (a^2 - b^2)\,x\,f_a(x)\,f_b(x).$$

3°) k étant une constante réelle strictement positive, et E l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle, définies et continues sur $[0,k]$, monter que l'application

$$(f,g) \in E^2 \mapsto \int_0^k x\,f(x)g(x)\,dx$$

est un produit scalaire sur E.

4°) Etablir l'orthogonalité de f_a et f_b dans les trois cas suivants:

- a et b sont deux solutions distinctes de l'équation $\psi_1(kx) = 0$
- a et b sont deux solutions distinctes de l'équation $\psi_1'(kx) = 0$
- a et b sont deux solutions distinctes de l'équation $x\psi_1'(kx) - h\,\psi_1(kx) = 0$ où h est une constante réelle quelconque.

Partie III

On se propose de trouver des fonctions non nulles θ de $[0,1] \times R^+$ dans R, de classe C^2, vérifiant

$$(2) \quad : \quad \int_s^1 \left(\int_0^\sigma \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(u,t)\,du \right) d\sigma + (1-s)\theta(s,t) = 0 .$$

1°) Montrer que toute solution de (2) vérifie les équations

$$(3) \quad : \quad \int_0^s \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(u,t)\,du + (s-1)\frac{\partial\theta}{\partial s}(s,t) + \theta(s,t) = 0 \text{ et}$$

$$(4) \quad : \quad (s-1)\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}(s,t) + 2\frac{\partial\theta}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(s,t) = 0 .$$

2°) ω et φ étant des constantes réelles, on cherche des solutions non nulles de (4) de la forme

$$\theta(s,t) = A(s)\ \cos(\omega t + \varphi)$$

où A est une fonction de classe C^2 de [0,1] dans R telle que $A(1) = \frac{1}{2}$.
Montrer que A vérifie une relation de la forme

$$(5) \quad : \quad (1-s)A'' + \alpha A' + \beta A = 0\ ,$$

α et β étant des constantes que l'on déterminera.

3°) Pour $s \in [0,1[$ on pose $x = 2\omega\sqrt{1-s}$ et on définit une fonction z telle que $\frac{z(x)}{x} = A(s)$.
Montrer que z vérifie une relation de la forme $x^2 z'' + P(x)z' + Q(x)z = 0$ où P et Q sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, que l'on précisera.
En déduire que l'on peut prendre pour solution de (5)

$$A(s) = \frac{\psi_1\left(2\omega\sqrt{1-s}\right)}{2\omega\sqrt{1-s}}$$

4°) Montrer que l'on doit avoir :

$$\lim_{s \to 1} A(s) = \omega^2 \int_0^1 \frac{\psi_1\left(2\omega\sqrt{1-s}\right)}{2\omega\sqrt{1-s}}\, ds\ .$$

En déduire que ω doit vérifier la condition

$$\int_0^{2\omega} \psi_1(v)\, dv = 1.$$

Donner alors les valeurs convenables de ω en fonction des zéros de ψ_0.

PARTIE IV

On admet que la fonction ψ_1 est bornée sur R et que, dans chaque intervalle $[n\pi,(n+1)\pi[$ où $n \in N$, il existe un zéro unique de ψ_0, zéro que l'on notera r_n.

On pose $\omega_n = \frac{1}{2} r_n$ et on désigne par $(\alpha_n)_{n\in N}$ et $(\beta_n)_{n\in N}$ deux suites de nombres réels.
On définit, lorsqu'il y a convergence, la fonction

$$(6) \quad : \quad \theta(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)) \frac{\psi_1(2\omega_n \sqrt{1-s})}{2\omega_n \sqrt{1-s}} .$$

1°) La fonction $x \mapsto \frac{\psi_1(x)}{x}$ est-elle bornée sur R ?

On suppose désormais la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ convergente.

La série (6) converge-t-elle ?
La fonction θ, si elle est définie, est-elle de classe C^2 ?

2°) Soit F une fonction de classe C^2 de $[0,1]$ dans R.
En utilisant la question II.4° avec $k=1$ et $h=-1$, déterminer une expression de α_n à l'aide d'une intégrale et de

$$I_n = \int_0^1 v(\psi_1(r_n v))^2 \, dv$$

de telle sorte que la fonction θ définie par (6) vérifie la relation $\theta(s,0) = F(s)$.